Prólogo

Este libro ha sido escrito pensando en la elaboración de un texto que recoja los contenidos de Variable Compleja que pueden cursar los alumnos para obtener el Grado de Matemáticas. Creemos que a la hora de presentar los resultados a los futuros graduados en Matemáticas los aspectos que deben primar son los que caracterizan esta disciplina: el rigor y la belleza.

La mayoría de los textos de variable compleja, casi todos en lengua inglesa, se redactan con el objetivo de que puedan ser usados por una gran variedad de alumnos, estudiantes de Ingeniería, Ciencias Físicas,..., por lo que el énfasis se pone en la obtención de la manera más económica, en el sentido de dificultad matemática, de una serie de resultados que permitan resolver problemas propios de esas disciplinas. En estos textos, por una parte, se tiende a presentar ciertos resultados, fundamentalmente el teorema de Cauchy, en versiones débiles, con hipótesis innecesarias o campo de aplicabilidad limitado, al objeto de efectuar pruebas más sencillas. Por otra parte, algunos conceptos fundamentales, como por ejemplo el de rama de la inversa de una función holomorfa, son tratados superficialmente o bien simplemente son ignorados. Nuestro objetivo al escribir este texto viene marcado por la experiencia de muchos años impartiendo asignaturas con contenidos de Variable Compleja a los alumnos de Matemáticas. Ello nos ha obligado a completar el desarrollo argumental de algunas pruebas que aparecen en muchos de los

libros consultados o a la revisión de la definición de algunos conceptos para que la presentación ante el alumno quedase clara.

Pensamos que la mejor manera de interesar a los estudiantes de Matemáticas en el estudio de la Variable Compleja es mostrarles la gran potencia de los resultados de esta teoría, así como facilitarles el camino para desentrañar los sorprendentes hechos de los que está poblada la misma, aunque para ello haya que recorrer un camino que a veces resulta árido.

Hemos querido comenzar el libro con unas brevísimas notas sobre el desarrollo histórico de las funciones de variable compleja. Estas notas, que integran el Capítulo 1, tienen un doble objetivo: En primer lugar, pretendemos darle al alumno de forma global una contextualización histórica de los conceptos que va a estudiar. En segundo lugar, y no menos importante, esperamos que este capítulo sea una invitación a la lectura de otros libros sobre la historia de las matemáticas, muy en especial aquellos que hemos utilizado en su redacción y que aparecen recogidos en la bibliografía final.

Participamos de la opinión de que la importancia esencial de las matemáticas reside en ser parte fundamental del acervo cultural del hombre. Por ello, a lo largo del libro aparecen citadas las numerosas personas que han contribuido a la elaboración del corpus teórico que aquí se expone. Hemos procurado escribir una breve reseña de cada una de ellas, señaladas mediante un superíndice numérico. Estas reseñas aparecen reunidas al final del texto como notas finales. Aprovechamos también dichas notas para dar explicaciones adicionales de algunos conceptos o resultados matemáticos que aparecen en el texto.

Antes de proceder a la descripción de los contenidos del libro por capítulos, quisiéramos hacer unas observaciones sobre la forma en que ha sido redactado. Como es usual en todo libro de matemáticas, empleamos, en su

sentido habitual, las figuras de definición, teorema, proposición, corolario,... Pero, además, utilizaremos las figuras de proposición-definición y teorema-definición. Con ellas pretendemos introducir en un solo enunciado algún nuevo ente matemático (por ejemplo, los números complejos y sus operaciones) junto con propiedades de estos entes que se deducen directamente a partir de su definición (por ejemplo, que los números complejos con las operaciones de suma y multiplicación tienen estructura de cuerpo conmutativo). Asimismo, usamos expresiones del tipo $A := B$ cuando el objeto matemático A, sea número o conjunto, se define mediante B, donde B es una expresión matemática ya conocida. En cuanto a las figuras, su número ha sido reducido a un mínimo, en la convicción de que el lector sabrá suplir con un dibujo la representación geométrica conveniente, en su caso.

Como hemos mencionado anteriormente, hemos tratado de recoger en el libro todos los contenidos de variable compleja que los nuevos planes de estudio prevén que deban ser –en el caso de contenidos obligatorios– o puedan ser –si se trata de contenidos opcionales– estudiados por quien opte al Grado en Matemáticas. Sin contar la introducción histórica, contenida en el Capítulo 1, hemos dividido estos contenidos en doce capítulos, que pasamos a describir brevemente.

El Capítulo 2 abarca el material básico requerido acerca de las estructuras algebraica, vectorial y topológica del plano complejo, que es “el lugar” donde se desarrolla la teoría.

Los “objetos” a estudiar en dicha teoría, a saber, las funciones complejas de variable compleja, se introducen en el Capítulo 3. Este resulta ser el más extenso del libro, debido a que se ha preferido proporcionar de una vez para siempre los resultados básicos de continuidad, diferenciabilidad y conformidad junto con una nutrida colección de funciones elementales, que van desde los polinomios a las inversas de las funciones exponencial y trigonométricas.

Es en este capítulo donde se introduce el concepto de rama de la inversa de una función holomorfa.

El Capítulo 4 estudia un instrumento fundamental de la teoría, a saber, las sucesiones y series de funciones, que el estudiante ya conoce, para el caso real, de cursos elementales. Se incide especialmente en las propiedades de las series de potencias, por estar íntimamente ligadas a las nociones básicas de holomorfía y analiticidad.

El Capítulo 5 introduce la integración de funciones complejas sobre arcos. Aunque la teoría se puede dar de forma más general, hemos supuesto para su desarrollo que los arcos sean regulares, ya que esto es suficiente para la mayoría de las aplicaciones teóricas y prácticas. Se estudian en este capítulo los conceptos de índice de un arco cerrado, homotopía y homología, así como su relación con la conexión simple. Penetrando levemente en el método ideado por Artin, esbozamos la teoría de cadenas y ciclos, ya que no complica demasiado la exposición y evita una excesiva casuística a la hora de tratar con integrales. El Teorema de la Primitiva, que se usará repetidamente a lo largo del libro, se expone en este capítulo.

Resultados cruciales, y al mismo tiempo de gran belleza, se demuestran en el Capítulo 6. En él, tras ofrecer la prueba de Goursat del Teorema de la Integral de Cauchy, se deducirá con relativa facilidad el teorema de representación integral dado por la Fórmula de Cauchy, la equivalencia entre holomorfía y analiticidad y el Teorema de Liouville. En vista de la preparación de que disponemos en este momento, hemos aprovechado la oportunidad para establecer un cuadro de equivalencias de la propiedad de conexión simple.

Con el Capítulo 7 concluimos una parte básica del análisis complejo, que recoge los contenidos de variable compleja que se prevé sean obligatorios en

los nuevos planes de estudio. Clasificaremos los posibles tipos de singularidades aisladas y probaremos la existencia del desarrollo en serie de Laurent de funciones analíticas en un anillo, lo cual generaliza el desarrollo de Taylor. El capítulo culmina con el Teorema de los Residuos, que proporciona un instrumento sencillo de cálculo de integrales y posee un gran número de aplicaciones prácticas.

El Capítulo 8 versa sobre propiedades de representación local de las funciones holomorfas, incluyendo el Principio del Módulo Máximo, Teorema de la Aplicación Abierta, Teorema de la Función Inversa, Teorema de descomposición local, Lema de Schwarz, etc. Se ofrecen, además, resultados prácticos como, por ejemplo, técnicas de localización de ceros y polos.

El Capítulo 9 refuerza los conocimientos sobre un tipo especial de funciones –las transformaciones bilineales– que fueron ya introducidas en el Capítulo 3. Aparte de su interés en sí, los resultados que se proporcionan aquí nos sirven como herramientas para profundizar en el estudio de la representación conforme, que culminará en el Capítulo 11.

En el Capítulo 10 introducimos el tipo de convergencia adecuado dentro del espacio de las funciones holomorfas, y estudiamos propiedades que se preservan bajo dicha convergencia. Asimismo, caracterizamos la compacidad relativa de familias de funciones analíticas, lo que nos allanará el camino para probar, en el capítulo siguiente, el fundamental Teorema del Isomorfismo de Riemann.

En Capítulo 11, tras determinar los isomorfismos del disco unidad, del plano complejo y del plano extendido, nos dedicamos a demostrar el teorema de Riemann anteriormente mencionado. Partiendo de este, establecemos la clasificación isomorfa de las regiones simplemente conexas. Asimismo, se

esboza el estudio de la extensión homeomórfica a la frontera, para concluir con una introducción a la clasificación isomorfa de las regiones biconexas.

El Capítulo 12, a caballo entre el análisis real y el complejo, versa sobre las funciones armónicas. Estas comparten similitudes formales con las funciones analíticas, y propiedades de unas pueden deducirse con reciprocidad de propiedades de las otras. El Problema de Dirichlet, que tiene sus raíces en la Física, se resuelve en algunos casos básicos.

Finalmente, el Capítulo 13 introduce otra herramienta fundamental en análisis complejo, a saber, la representación de funciones en producto infinito. Es posible que, a lo largo del Grado de Matemáticas, sea esta la primera ocasión en que el estudiante se encuentra con un estudio sistematizado de estos productos. Para concluir, nos ha parecido bien presentar como último resultado de esta obra el bello teorema de Euler de factorización de la función seno.

Así pues, se ha intentado compendiar en el presente libro las 5 herramientas básicas para el estudio de las funciones analíticas, a saber: representación en serie de potencias, prolongación analítica, representación integral, representación conforme y representación en producto infinito.

Hemos intentado que esta obra sea, en la medida de lo posible, autocontenida. No obstante, sería deseable que el lector poseyese conocimientos básicos sobre cálculo diferencial e integral en una y varias variables reales, topología de la recta y del plano, Topología General, Medida de Lebesgue, estructuras algebraicas, Álgebra Lineal, Geometría Analítica y rudimentos de Análisis Funcional.

Permítasenos unas palabras acerca de las fuentes utilizadas en la elaboración de este texto y de los libros recomendados para el lector. Están enumerados en la sección de Bibliografía, ubicada al final del texto. Exis-

te una abundante literatura introductoria al Análisis de Variable Compleja. Los libros aquí enumerados constituyen solo un pequeño porcentaje de los posibles a usar en esta materia. Cada uno de ellos ha sido utilizado en la elaboración de alguna parte de la presente obra, pero hay que tener en cuenta que el enfoque de los temas a tratar puede variar de libro a libro. Por supuesto, todos contienen mucho más material adicional, que puede ayudar al estudiante tanto a profundizar en la teoría dada aquí como a introducirse en temas nuevos. Además, la mayoría de los textos sugeridos contienen listados de ejercicios y problemas sobre las materias tratadas, y en algunos casos se dan sugerencias para resolverlos. En la época actual, una inestimable ayuda es la dada por Internet, que nos ha resultado sumamente útil, especialmente en las notas biográficas de los diversos analistas en Variable Compleja.

Para concluir, nos gustaría dejar constancia de nuestro sincero agradecimiento a nuestros colegas J.A. Prado-Bassas y J.A. Facenda por el asesoramiento técnico proporcionado en la elaboración del texto, a Manuela Burgos y David Ruiz por la ayuda prestada en el trazado de las ilustraciones, al referee por sus acertadas sugerencias, las cuales han conducido a una mejora importante de la redacción original del libro, y al Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Sevilla por el interés mostrado en la publicación de esta obra.

En esta segunda edición, se han corregido algunas erratas que se han advertido en la primera.

Los autores